Metoder för numerisk beräkning av π

$$\pi = 3,14159265358979 3\ldots$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \ldots$$

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \ldots$$

Specialarbete i matematik

av Mats Anderbok, N3.

Läsåret 1989–1990

Gymnasieskolan i Vänersborg

FÖRORD

Detta är ett specialarbete i matematik, och som ett sådant skall det utgöra ett större enskilt arbete, som avser att på ett självständigt sätt behandla ett mycket begränsat ämnesområde, beräkning av π. Samtidigt kommer det i bevisföringen in inslag från ett ganska brett matematiskt fält. Självklart rör det huvudsakligen analys, som t ex gränsvärdesberäkning, derivering och integrering, men även sådant som induktionsbevis m fl viktiga matematiska metoder förekommer.

Arbetet innehåller ingen uttömmande behandling av av alla aspekter på beräkning av π; det skulle leda alltför långt, och därtill har tiden varit alltför knapp. Under arbetets gång har jag märkt att allting tar minst dubbelt så lång tid, som man tror från början. På grund av tidsbrist saknas därför stora delar, som kanske borde ha varit med. Den planerade inledningen med historisk översikt på några få sidor har inte alls hunnits med. I kapitel 1 har jag inte hunnit skriva ut felanalysen, som naturligtvis borde ha redovisats. Kapitel 2 är mycket omfattande, men ändå saknas numeriska beräkningar med metoden och en jämförelse mellan feluppskattningen och det verkliga felet. Kapitel 3 är mycket kort och kunde naturligtvis ha gjorts något utförligare, med t ex felanalys och en genomgång av hur flitigt metoden använts under historiens lopp. I kapitel 4 saknas helt ett bevis för att man verkligen får exakt π. Detta ligger tyvärr över min nuvarande kunskapsnivå. Till bilagorna med Pascal-program borde självklart ha lämnats utförliga kommentarer om de använda algoritmerna, men till detta har som sagts inte funnits tid, då vi nu är inne på terminens sista vecka. Programmen är för övrigt inte avsedda att vara programmeringstekniskt avancerade utan kan förbättras avsevärt. Jag beklagar djupt dessa ofullständigheter och brister.

Trots detta är jag ganska nöjd efter en arbetsinsats på uppskattningsvis 400 timmar. Vad beträffar stringensen i bevisföringen ska man naturligtvis inte förvänta sig för mycket, eftersom det är ett arbete på gymnasienivå. Jag har dock försökt skriva någorlunda strikta bevis och även i övrigt eftersträva en korrekt stil. Jag hoppas innerligt att det inte skall vålla läsaren några större problem att följa framställningen.

Jag vill tacka högskolelektor Per-Anders Ivert vid Linköpings Tekniska Högskola för viss hjälp med utformningen av beviset i kapitel 3. Jag vill också tacka min handledare adjunkt Per-Olof Hiller (lärare i matematik och datakunskap) för hjälp med praktiska detaljer. Slutligen vill jag tacka min klasskamrat Jonas Grimheden, som varit mig behjälplig vid utformningen av titelsidan.

Mats Anderbok

Vänersborg

Juni 1990

INNEHÅLL

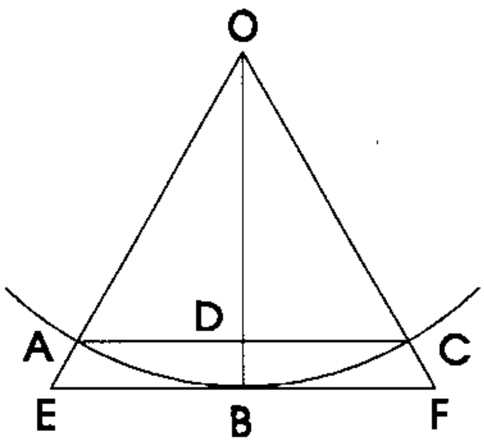
1. ARKIMEDES METOD

Arkimedes metod bygger på beräkningar av omkretsen av till en cirkel inskrivna och omskrivna regelbundna månghörningar.

Arkimedes börjar med den inskrivna 6-hörningen, går sedan vidare till 12-hörningen, 24-hörningen och 48-hörningen, och avslutar med den inskrivna regelbundna 96-hörningen.

Han använder därvid en metod för att fördubbla antalet sidor enligt följande:

Sätt cirkelns radie till 1.
Kalla sidan i den inskrivna regelbundna n-hörningen s_n.



Med beteckningarna i figuren är $|OB| = |AO| = 1$, $|AC| = s_n$ och $|AB| = s_{2n}$.

Pythagoras sats ger nu

$$1 = |AO|^2 = \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + |OD|^2 \Rightarrow |OD| = \sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}$$

och

$$s_{2n}^2 = \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + (1 - |OD|)^2$$

varav

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} \ . \qquad (1)$$

När man vet sidan i den inskrivna regelbundna n-hörningen, s_n, kan man med hjälp av likformighet beräkna sidan i den omskrivna regelbundna n-hörningen, S_n.

I figuren ovan gäller

$$\frac{|EF|}{|AC|} = \frac{|OB|}{|OD|} \quad \text{dvs} \quad \frac{S_n}{s_n} = \frac{1}{\sqrt{1-(s_n/2)^2}}$$

varav

$$S_n = \frac{s_n}{\sqrt{1-(s_n/2)^2}} . \qquad (2)$$

Vi har $s_6=1$, och kan nu med hjälp av (1) beräkna s_{12}, s_{24}, s_{48} och s_{96}. Med hjälp av (2) kan vi sedan beräkna S_6, S_{12}, S_{24}, S_{48} och S_{96}.

Vidare gäller

$$\frac{n}{2}\, s_n < \pi < \frac{n}{2}\, S_n,$$

vilket ger följande tabell:

6-hörning	$3{,}0000 < \pi < 3{,}4641$
12-hörning	$3{,}1058 < \pi < 3{,}2154$
24-hörning	$3{,}1326 < \pi < 3{,}1597$
48-hörning	$3{,}1394 < \pi < 3{,}1461$
96-hörning	$3{,}1410 < \pi < 3{,}1427$

Arkimedes angav med hjälp av de inskrivna och omskrivna regelbundna 96-hörningarna gränserna för π till $3\frac{10}{71}$ och $3\frac{1}{7}$, och detta ansåg han tydligen vara en tillräckligt god approximation för de beräkningar han önskade genomföra.

Vi har alltså två gränser mellan vilka vi vet att π måste ligga. Men var mellan dessa gränser ligger π? Mitt emellan?

För att formulera problemet matematiskt:

Vad är

$$\lim_{n\to\infty} k_n,$$

där k_n definieras genom

$$s_n+k_n(S_n-s_n)=\frac{2\,\pi}{n} \; ?$$

Låt oss då först beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2s_{2n}-s_n}{S_n-s_n}$$

och

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2S_{2n}-s_n}{S_n-s_n} \ .$$

Då $n\to\infty$ gäller att $s_n\to 0$, och det första av dessa gränsvärden kan skrivas

$$\lim_{s\to 0} \frac{2\sqrt{2-\sqrt{4-s^2}} - s}{s/\sqrt{1-s^2/4} - s} \ .$$

För att lättare kunna beräkna gränsvärdet sätter vi $t=\sqrt{4-s^2}$. Då gäller att $s=\sqrt{4-t^2}$ och $s\to 0$ ger $t\to 2$. Gränsvärdet beräknas enligt följande

$$\lim_{s\to 0} \frac{2\sqrt{2-\sqrt{4-s^2}} - s}{2s/\sqrt{4-s^2} - s} = \lim_{t\to 2} \frac{2\sqrt{2-t} - \sqrt{4-t^2}}{2\sqrt{4-t^2}/t - \sqrt{4-t^2}}$$

$$= \lim_{t\to 2} \frac{2 - \sqrt{2+t}}{2\sqrt{2+t}/t - \sqrt{2+t}}$$

$$= \lim_{t\to 2} \frac{t\left(2 - \sqrt{2+t}\right)}{\sqrt{2+t}\left(2 - t\right)}$$

$$= \lim_{t\to 2} \frac{t}{\sqrt{2+t}\left(2 + \sqrt{2+t}\right)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2+2}\left(2 + \sqrt{2+2}\right)}$$

$$= \frac{1}{4} \ .$$

Det andra gränsvärdet kan skrivas

$$\lim_{s\to 0} \frac{2\sqrt{2-\sqrt{4-s^2}}\Big/\sqrt{1-\left(\sqrt{2-\sqrt{4-s^2}}\right)^2/4} \;-\; s}{s/\sqrt{1-s^2/4} \;-\; s} .$$

Sätter vi även här $t=\sqrt{4-s^2}$ får vi

$$\lim_{s\to 0} \frac{2\sqrt{2-\sqrt{4-s^2}}\Big/\sqrt{2+\sqrt{4-s^2}} \;-\; s}{2s/\sqrt{4-s^2} \;-\; s} =$$

$$= \lim_{t\to 2} \frac{4\sqrt{2-t}\Big/\sqrt{2+t} \;-\; \sqrt{4-t^2}}{2\sqrt{4-t^2}/t \;-\; \sqrt{4-t^2}}$$

$$= \lim_{t\to 2} \frac{4/\sqrt{2+t} \;-\; \sqrt{2+t}}{2\sqrt{2+t}/t \;-\; \sqrt{2+t}}$$

$$= \lim_{t\to 2} \frac{t\left(4 - (2+t)\right)}{2(2+t) - t(2+t)}$$

$$= \lim_{t\to 2} \frac{t}{2+t}$$

$$= \frac{1}{2} .$$

Då $s_n \to 0$ är alltså $s_{2n} \approx (s_n+\frac{1}{4}(S_n-s_n))/2$ och $S_{2n} \approx (s_n+\frac{1}{2}(S_n-s_n))/2$. Vi får nu $\lim_{n\to\infty} k_n$ som summan av en geometrisk serie:

$$\lim_{n\to\infty} k_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \ldots = \frac{1}{3}$$

Formeln för beräkning av π blir

$$\pi \approx \frac{n}{2}\left(s_n+\frac{1}{3}(S_n-s_n)\right)$$

vilket ger följande tabell med approximationer av π:

6-hörning	$\pi \approx 3{,}155$
12-hörning	$\pi \approx 3{,}1423$
24-hörning	$\pi \approx 3{,}14164$
48-hörning	$\pi \approx 3{,}141596$
96-hörning	$\pi \approx 3{,}1415928$

Som man ser av tabellen ovan, och som man också kan utröna ur de tidigare behandlade gränsvärdena, är approximationerna av π något för stora, men med denna smärre utvidgning av Arkimedes metod får man ändå tillräckligt noggranna värden för flertalet praktiska beräkningar av en cirkels omkrets.

En felanalys ger att

$$\frac{n}{2}\left(s_n+\frac{1}{3}(S_n-s_n)\right) - \pi \approx \frac{\pi^5}{20}\, n^{-4}$$

dvs

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2}\left(s_n+\frac{1}{3}(S_n-s_n)\right) - \pi}{n^4} = \frac{\pi^5}{20} .$$

2. Bernoullipolynom och Euler-MacLaurins summationsformel

Vi skall här studera en speciell klass av polynom, som kallas Bernoulliska efter den berömde schweiziske matematikern *J. Bernoulli*, och med hjälp av dessa bl a bevisa formeln

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

samt därefter använda Euler-MacLaurins summationsformel för att på ett effektivt sätt kunna beräkna summan numeriskt.

Kalla ett Bernoullipolynom av grad n för $B_n(x)$. Vi låter nu $B_1(x)=x-\frac{1}{2}$ och definierar sedan B_n rekursivt enligt följande

$$B_n'(x) = n\, B_{n-1}(x), \quad n\geq 2 \tag{1}$$

$$B_n(0) = B_n(1), \quad n\geq 2 \tag{2}$$

Villkoret (2) kräver att

$$\int_0^1 B_n(x)\, dx = 0, \tag{3}$$

eftersom

$$\int_0^1 B_n(x)\, dx = \int_0^1 \frac{B_{n+1}'(x)}{n+1}\, dx = \left[\frac{B_{n+1}(x)}{n+1}\right]_0^1 = 0\ .$$

Det är nu klart att vi successivt entydigt kan bestämma $B_n(x)$ genom att integrera $B_{n-1}(x)$ enligt (1) och därefter bestämma integrationskonstanten med hjälp av (3).

T ex får vi för n=2:

$$B_2(x) = 2\int(x-\tfrac{1}{2})dx = 2(\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}x)+C = x^2-x+C$$

$$\int_0^1 (x^2-x+C)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + Cx\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + C = 0\ ,$$

varav $C = \frac{1}{6}$.

Alltså $B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6}$.

Vi skall nu uppställa och bevisa en rad satser rörande de Bernoulliska polynomen.

<u>Sats 1:</u> $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$, $n\geq 1$.

Bevis:

Vi skall visa detta med induktion.

Start:

$$B_1(1-x) = (1-x)-\frac{1}{2} = -(x-\frac{1}{2}) = (-1)B_1(x)$$

Induktionssteg:

Antag att $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$ för ett fixt n.

Av (1) har vi

$$\frac{d}{du} B_{n+1}(u) = (n+1) B_n(u)$$

varav, med $u=1-x$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} B_{n+1}(u) &= \frac{du}{dx}\cdot\frac{d}{du} B_{n+1}(u) \\ &= (-1)(n+1)B_n(1-x) \ .\end{aligned}$$

Vi får nu av induktionsantagandet och (1) att

$$\begin{aligned}B_{n+1}(1-x) &= \int \frac{d}{dx} B_{n+1}(1-x)\, dx \\ &= \int -(n+1)B_n(1-x)\, dx \\ &= \int (-1)^{n+1}(n+1)B_n(x)\, dx \\ &= (-1)^{n+1}B_n(x) + C \ .\end{aligned}$$

Men av (3) får vi

$$\begin{aligned}0 = -\int_0^1 B_{n+1}(x)\, dx &= \int_0^1 B_{n+1}(1-x)\, dx \\ &= \int_0^1 ((-1)^{n+1}B_{n+1}(x) + C)\, dx \\ &= (-1)^{n+1}\int_0^1 B_{n+1}(x)\, dx + \int_0^1 C\, dx \\ &= (-1)^{n+1}\cdot 0 + C \ ,\end{aligned}$$

varav $C=0$, och

$$B_{n+1}(1-x) = (-1)^{n+1}B_{n+1}(x).$$

Induktionsantagandet gäller alltså även för n+1.

Slutsats:

Enligt induktionsprincipen gäller nu

$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$ för alla $n\geq 1$.□

<u>**Sats 2:**</u> Det finns en talföljd $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$, de Bernoulliska

talen, sådan att

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k x^{n-k}, \qquad n\geq 1$$

och denna kan beräknas genom rekursionsformeln

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0, \qquad n\geq 2,$$

där $b_0=1$.

Bevis:

Vi börjar med att ge ett induktionsbevis för den första delen.

Start:

Med $b_0=1$ och $b_1=-\frac{1}{2}$ är $B_1(x) = x - \frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} b_k x^{1-k}$.

Induktionssteg:

Antag att $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k x^{n-k}$ för ett fixt n.

Då är, enligt (1),

$$\begin{aligned}
B_{n+1}(x) &= (n+1) \int \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k x^{n-k} \right) dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} \int (n+1)\binom{n}{k} b_k x^{n-k}\, dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n+1}{n-k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} b_k x^{n-k+1} \right) + b_{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} b_k x^{n-k+1} \right) + b_{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_k x^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Alltså gäller induktionsantagandet även för n+1, om vi bara ser till att välja integrationskonstanten till b_{n+1}.

Slutsats:

Enligt induktionsprincipen existerar det en talföljd

$\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$, sådan att $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k\, x^{n-k}$ för alla $n\geq 1$.

Nu kan vi bevisa även den andra delen.

För $n\geq 2$ är $b_n=B_n(0)=B_n(1)$, och eftersom

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k\, x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k\, x^{n-k} + b_n$$

får vi, med $x=1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = B_n(1) - b_n = 0,$$

vilket bevisar den andra delen.□

<u>Sats 3:</u> I intervallet $[0,1]$ är $B_{2k+1}(x) = 0$, $k\geq 1$, i punkterna 0, 1/2, 1 och inga andra.

Bevis:

Vi börjar med att visa att $B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(\frac{1}{2}) = B_{2k+1}(1) = 0$ för alla $k\geq 1$.

Enligt sats 1 är $B_{2k+1}(1-x) = -B_{2k+1}(x)$, och insättning av $x=0$ ger, med användande av (2),

$$B_{2k+1}(1) = -B_{2k+1}(0) = -B_{2k+1}(1),$$

varav

$$B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(1) = 0.$$

Insättning av $x=\frac{1}{2}$ ger

$$B_{2k+1}(\tfrac{1}{2}) = -B_{2k+1}(\tfrac{1}{2}) \Rightarrow B_{2k+1}(\tfrac{1}{2}) = 0.$$

Att inga fler nollställen finns i intervallet $[0,1]$ visar vi med induktion.

Start:

För $k=1$ har vi

$$B_3(x) = x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x = x\,(x-\tfrac{1}{2})\,(x-1),$$

vilket utesluter ytterligare nollställen.

Induktionssteg:

Antag att $B_{2k+1}(x)>0$ i intervallet $(0,1/2)$ för ett fixt k. Om $B_{2k+1}(x)<0$ kan vi i stället studera $-B_{2k+1}(x)$. Detta är ekvivalent med att nollställen saknas.

Av (1) får vi

$$B''_{2k+3}(x) = (2k+3)\, B'_{2k+2}(x) = (2k+3)\,(2k+2)\, B_{2k+1}(x).$$

Alltså är $B''_{2k+3}(x)>0$ i intervallet $(0,1/2)$, dvs $B''_{2k+3}(x)$ är strikt konvex på intervallet. Ett annat kriterium för en strikt konvex funktion är att en korda ligger helt ovanför funktionskurvan. Låter vi denna korda vara x-axeln mellan $x=0$ och $x=\frac{1}{2}$, följer att $B_{2k+3}(x)<0$ då $x\in(0,1/2)$, dvs nollställen saknas. Alltså gäller induktionsantagandet även för k+1.

För $x\in(1/2,1)$ följer motsvarande direkt av sats 1.

Slutsats:

Enligt induktionsprincipen följer att $B_{2k+1}(x)\neq 0$ i intervallen $(0,1/2)$ och $(1/2,1)$ för alla $k\geq 1$.□

<u>**Sats 4:**</u> $B_n(2x) = 2^{n-1}\left(B_n(x) - B_n(x+\frac{1}{2}) \right)$, $n\geq 1$.

Bevis:

Vi visar även denna sats med induktion.

Start:

För $n=1$ har vi

$$B_1(2x) = B_1(x) + B_1(x+\tfrac{1}{2}),$$

eller ekvivalent

$$2x-\tfrac{1}{2} = x-\tfrac{1}{2} + x-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2},$$

vilket uppenbarligen gäller för alla x.

Induktionssteg:

Antag, för ett fixt n, att $B_n(2x) = 2^{n-1}(B_n(x)-B_n(x+\frac{1}{2}))$.

Nu är, enligt (1),

$$\frac{d}{du} B_{n+1}(u) = (n+1)B_n(u),$$

och med $u=2x$ får vi

$$\frac{d}{dx} B_{n+1}(u) = \frac{du}{dx}\frac{d}{du} B_{n+1}(u) = 2(n+1)B_n(2x).$$

Alltså

$$\begin{aligned} B_{n+1}(2x) &= \int \frac{d}{dx} B_{n+1}(2x)\, dx \\ &= \int 2(n+1)B_n(2x)\, dx \\ &= \int 2(n+1)2^{n-1}(B_n(x)+B_n(x+\tfrac{1}{2}))\, dx \\ &= 2^n \left(\int (n+1)B_n(x)\, dx + \int (n+1)B_n(x+\tfrac{1}{2})\, dx \right) \end{aligned}$$

$$= 2^n \left(B_{n+1}(x) + B_{n+1}(x+\tfrac{1}{2}) \right) + C$$

För att bestämma integrationskonstanten, C, använder vi oss av (3). För högerledet får vi

$$\int_0^{1/2} B_{n+1}(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 B_{n+1}(x)\,dx = 0$$

För vänsterledet får vi

$$\int_0^{1/2} \left(2^n \left(B_{n+1}(x) + B_{n+1}(x+\tfrac{1}{2})\right) + C \right) dx =$$

$$= 2^n \left(\int_0^{1/2} B_{n+1}(x)dx + \int_0^{1/2} B_{n+1}(x+\tfrac{1}{2})dx \right) + \int_0^{1/2} C\,dx$$

$$= 2^n \int_0^1 B_{n+1}(x)\,dx + \frac{C}{2}$$

$$= \frac{C}{2}$$

Således gäller C=0 och

$$B_{n+1}(2x) = 2^n \left(B_{n+1}(x) - B_{n+1}(x+\tfrac{1}{2}) \right) .$$

Slutsats:

Enligt induktionsprincipen gäller

$$B_n(2x) = 2^{n-1} \left(B_n(x) - B_n(x+\tfrac{1}{2}) \right)$$

för alla $n \geq 1$.□

<u>Sats 5:</u> $|B_{2k+1}(x)| < (2k+1)|b_{2k}|/4,\ 0 \leq x \leq 1,\ k \geq 1$

Bevis:

Enligt sats 1 är $|B_{2k+1}(x)| = |B_{2k+1}(1-x)|$, varför vi endast behöver betrakta intervallet [0,1/2].

Enligt sats 3 är $|B_{2k+1}(x)|>0$ i intervallet (0,1/2) för $k \geq 1$. För k=0 har vi $|B_1(x)| = |x-\frac{1}{2}| > 0,\ 0<x<1/2$.

Alltså får vi av (1) att $B_{2k}(x)$ antingen är strängt växande eller strängt avtagande på intervallet (0,1/2). Eftersom vi betraktar absolutbeloppen innebär det ingen inskränkning om vi antar att $B_{2k}(x)$ är strängt avtagande.

Av sats 1 och (3) får vi

$$2\int_0^{1/2} B_{2k}(x)\,dx = \int_0^{1/2} B_{2k}(x)\,dx + \int_{1/2}^1 B_{2k}(x)\,dx = 0 .$$

Då måste

$$B_{2k}(0) = b_{2k} > 0$$
och
$$B_{2k}(\tfrac{1}{2}) < 0 \ .$$
Vidare finns ett tal x_0, $0<x_0<\frac{1}{2}$, så att $B_{2k}(x_0)=0$.

Eftersom
$$B_{2k+1}(x) = (2k+1)\int_0^x B_{2k}(t)\ dt$$
får vi alltså
$$\max|B_{2k+1}(x)| = (2k+1)\int_0^{x_0} B_{2k}(x)\ dx$$
Tillämpar vi sats 4, med $x=\frac{1}{4}$, i kombination med sats 1, får vi
$$\begin{aligned} B_{2k}(\tfrac{1}{2}) &= 2^{k-1}\left(B_{2k}(\tfrac{1}{4}) + B_{2k}(\tfrac{3}{4}) \right) \\ &= 2^{k}\ B_{2k}(\tfrac{1}{4}) \end{aligned}$$
varav
$$B_{2k}(\tfrac{1}{4}) = \frac{B_{2k}(\frac{1}{2})}{2^{2k}} \ .$$
Alltså är $B_{2k}(\frac{1}{4})<0$ och då $B_{2k}(x)$ är strängt avtagande kan vi dra slutsatsen att $x_0<\frac{1}{4}$.

Slutligen får vi nu
$$\begin{aligned} |B_{2k+1}(x)| &\le (2k+1)\int_0^{x_0} |B_{2k}(x)|\ dx \\ &< (2k+1)\int_0^{x_0} |b_{2k}|\ dx \\ &< (2k+1)\int_0^{1/4} |b_{2k}|\ dx \\ &= \frac{(2k+1)|b_{2k}|}{4} \ \square \end{aligned}$$

☆ ☆ ☆

Låt $\overline{B}_n(x)$ beteckna den funktion, med perioden 1, som är lika med $B_n(x)$ i intervallet $[0,1]$.

Vi skall nu diskutera Fourierserien för $\overline{B}_n$. Att utveckla en funktion f, med perioden 1, i Fourierserie innebär att man framställer den som en summa

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f)\ e^{2\pi ikx} \tag{4}$$

där $c_k(f)$ är de sk Fourierkoefficienterna till f.
Om (4) gäller i den starka meningen att

$$\max \left| f(x) - \sum_{-N}^{N} c_k(f)\ e^{2\pi ikx} \right| \to 0 \quad \text{då } N \to \infty,$$

kan vi multiplicera med $e^{-2\pi i\nu x}$ och integrera varje term för sig. Eftersom

$$\int_0^1 e^{-2\pi i\mu x}\ dx = \left[\frac{e^{-2\pi i\mu x}}{2\pi i\nu} \right]_0^1 = 0 \quad \text{om } \mu\neq 0$$

och

$$\int_0^1 e^{-2\pi i\mu x}\ dx = \int_0^1 1\ dx = 1 \quad \text{om } \mu=0,$$

får vi

$$\int_0^1 f(x)\ e^{-2\pi i\nu x}\ dx = \int_0^1 \left(\sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f)\ e^{-2\pi i(\nu-k)x} \right) dx$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \left(c_k(f) \int_0^1 e^{-2\pi i(\nu-k)x}\ dx \right)$$

$$= c_\nu(f)\ .$$

Fourierkoefficienterna blir alltså

$$c_\nu(f) = \int_0^1 f(x)\ e^{-2\pi i\nu x}\ dx\ . \tag{5}$$

Enligt (3) har vi nu

$$c_0(\overline{B}_n) = \int_0^1 B_n(x)\ dx = 0,$$

om $n\geq 1$, och då $\nu\neq 0$ får vi med hjälp av (1) och (2)

$$c_\nu(\overline{B}_n) = \int_0^1 B_n(x)\ e^{-2\pi i\nu x}\ dx$$

$$= \frac{1}{2\pi i\nu} \int_0^1 B_n'(x)\ e^{-2\pi i\nu x}\ dx$$

$$= \frac{n}{2\pi i\nu} \int_0^1 B_{n-1}(x)\ e^{-2\pi i\nu x}\ dx$$

$$= \ldots = \frac{n!}{(2\pi i\nu)^{n-1}} \int_0^1 B_1(x)\; e^{-2\pi i\nu x}\, dx$$

$$= - \frac{n!}{(2\pi i\nu)^{n}}$$

där vi använt partialintegrationen

$$\int_0^1 B_k(x)\; e^{-2\pi i\nu x}\, dx = \left[B_k(x)\; \frac{e^{-2\pi i\nu x}}{-2\pi i\nu} \right]_0^1$$

$$- \int_0^1 B_k'(x)\; \frac{e^{-2\pi i\nu x}}{-2\pi i\nu}\, dx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i\nu} \displaystyle\int_0^1 B_k'(x)\; e^{-2\pi i\nu x}\, dx, & \text{om} \quad k \ge 2 \\ -\dfrac{1}{2\pi i\nu}, & \text{om} \quad k=1 \end{cases}$$

Frågan är nu om (4) gäller med dessa koefficienter. Vi vill alltså visa att

$$\overline{B}_n(x) = \sum_{\nu \neq 0} \frac{-n!}{(2\pi i\nu)^n}\; e^{-2\pi i\nu x}$$

för $n \ge 2$. (Fourierserien för $\overline{B}_1$ är mer komplicerad och tas inte upp här.)

Låt alltså $n \ge 2$, $0 \le y \le 1$, och betrakta funktionen

$$f(x) = \frac{B_n(x) - B_n(y)}{1 - e^{2\pi i(x-y)}}, \quad 0 \le x \le 1.$$

Med lämplig definition då $x=y$ samt då $x=y\pm1$ är $f(x)$ kontinuerligt deriverbar för $0 \le x \le 1$ (se appendix A).
Vi har då

$$c_\nu(f) = \int_0^1 f(x)\; e^{-2\pi i\nu x}\, dx$$

$$= \left[f(x)\; \frac{e^{-2\pi i\nu x}}{-2\pi i\nu} \right]_0^1 - \int_0^1 f'(x)\; \frac{e^{-2\pi i\nu x}}{-2\pi i\nu}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2\pi i\nu}\left(\left[f(1)-f(0)\right] - \int_0^1 f'(x)\ e^{-2\pi i\nu x}\ dx\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i\nu}\int_0^1 f'(x)\ e^{-2\pi i\nu x}\ dx \quad \to 0,\ \text{då } \nu\to\infty.$$

Eftersom

$$B_n(x) = B_n(y) + f(x) - f(x)\ e^{2\pi i(x-y)},\ 0\le x\le 1,$$

så får vi

$$c_\nu(\overline{B}_n) = \int_0^1 B_n(x)\ e^{-2\pi i\nu x}\ dx$$

$$= \int_0^1 \left[B_n(y) + f(x) - f(x)\ e^{2\pi i(x-y)}\right] e^{-2\pi i\nu x}\ dx$$

$$= \begin{cases} c_\nu(f) - e^{-2\pi iy}\ c_{\nu-1}(f), & \text{om } \nu\neq 0 \\ \overline{B}_n(y) + c_\nu(f) - e^{-2\pi iy}\ c_{\nu-1}(f), & \text{om } \nu=0. \end{cases}$$

Alltså är

$$\sum_{-N}^{N} c_\nu(\overline{B}_n)\ e^{-2\pi i\nu y} = \overline{B}_n(y) + \sum_{-N}^{N} c_\nu(f)\ e^{-2\pi i\nu y}$$

$$- e^{-2\pi iy}\sum_{-N}^{N} c_{\nu-1}(f)\ e^{-2\pi i\nu y}$$

$$= \overline{B}_n(y) + \sum_{-N}^{N} c_\nu(f)\ e^{-2\pi i\nu y} - \sum_{-N-1}^{N-1} c_\nu(f)\ e^{-2\pi i\nu y}$$

$$= \overline{B}_n(y) + c_N(f)e^{-2\pi iNy} - c_{-N-1}(f)e^{2\pi i(N+1)y}$$

$$\to \overline{B}_n(y) \text{ då } N\to\infty,$$

vilket bevisar att för $n\ge 2$ gäller

$$\overline{B}_n(x) = -n!\sum_{\nu\neq 0}\frac{e^{-2\pi i\nu x}}{(2\pi i\nu)^n} \tag{6}$$

Med $n=2$ och $x=0$ får vi nu av (6)

$$b_2 = -2!\sum_{\nu\neq 0}\frac{1}{(2\pi i\nu)^2}$$

eller ekvivalent

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \tag{7}$$

vilket är den formel vi skall använda för beräkning av π.

Låt f vara en funktion med många kontinuerliga derivator. Genom upprepad partialintegration och med hjälp av bernoullipolynomen får vi

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[(x-\tfrac{1}{2})f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 (x-\tfrac{1}{2})f'(x)\,dx$$

$$= \frac{f(0)+f(1)}{2} - \left[\frac{B_2(x)}{2}\,f'(x)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{B_2(x)}{2}\,f''(x)\,dx$$

$$= \frac{f(0)+f(1)}{2} - \left[\frac{B_2(x)}{2}\,f'(x)\right]_0^1 + \left[\frac{B_3(x)}{6}\,f''(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{B_3(x)}{6}\,f'''(x)\,dx$$

$$= \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^k\,\frac{B_k(x)}{k!}\,f^{(k-1)}(x)\right]_0^1 + (-1)^n\int_0^1 \frac{B_n(x)}{n!}\,f^{(n)}(x)\,dx$$

Eftersom $B_k(0)=B_k(1)=0$ om k är udda får vi, om vi väljer $n=2p+1$,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{p}\left[\frac{b_{2k}}{(2k)!}\,f^{(2k-1)}(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{B_{2p+1}(x)}{(2p+1)!}\,f^{(2p+1)}(x)\,dx$$

Om nu f(x) är kontinuerligt deriverbar 2p+1 ggr i intervallet [n,n+1] kan vi byta ut integrationsgränserna 0 och 1 mot n och n+1, och får då (med $\overline{B}_{2p+1}$ i stället för B_{2p+1})

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx = \frac{f(n)+f(n+1)}{2} - \left[\sum_{k=1}^{p} \frac{b_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(x)\right]_n^{n+1}$$

$$- \int_n^{n+1} \frac{\overline{B}_{2p+1}(x)}{(2p+1)!} f^{(2p+1)}(x)\,dx$$

Summerar vi för n = N, N+1, ..., M-1 får vi

$$\int_N^M f(x)\,dx = \sum_{N<n<M} f(n) + \frac{f(N)+f(M)}{2}$$

$$- \left[\sum_{k=1}^{p} \frac{b_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(x)\right]_N^M \tag{8}$$

$$- \int_N^M \frac{\overline{B}_{2p+1}(x)}{(2p+1)!} f^{(2p+1)}(x)\,dx$$

vilket är den s k *Euler-MacLaurins summationsformel*.

Sätter vi nu $f(x)=1/x^2$ och låter $M\to\infty$, får vi

$$\int_N^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2N^2} - \left[\sum_{k=1}^{p} \frac{b_{2k}}{(2k)!} D^{(2k-1)}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]_N^\infty$$

$$- \int_N^\infty \frac{\overline{B}_{2p+1}(x)}{(2p+1)!} D^{(2p+1)}\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

Eftersom $D^{(n)}(x^{-2}) = (-1)^n(n+1)!x^{-(n+2)}$, får vi med några smärre omskrivningar

$$\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \sum_{k=1}^{p} b_{2k} N^{-(2k+1)}$$

$$- (2p+2) \int_N^\infty \overline{B}_{2p+1}(x)\, x^{-(2p+3)}\,dx \tag{9}$$

För att beräkna

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

behöver vi alltså bara beräkna summan av de N första termerna exakt och sedan använda (9) för att uppskatta resten.

De bernoulliska talen, b_{2k}, kan vi beräkna med hjälp av andra delen av sats 2.

Integralen i högerledet kan vi inte beräkna numeriskt, utan vi får nöja oss med att försöka göra en uppskattning av hur stort felet blir om vi försummar denna.
Vi vill alltså uppskatta en övre gräns för absolutbeloppet av integralen

$$\int_N^\infty \overline{B}_{2p+1}(x)\ x^{-(2p+3)}\ dx$$

Antag att $\overline{B}_{2p+1}(x)$ är positiv i intervallet $(N,\ N+\frac{1}{2})$. (Helt analogt resultat följer om $\overline{B}_{2p+1}(x)$ är negativ, eftersom vi arbetar med absolutbelopp; se också sats 3.) Då är $\overline{B}_{2p+1}(x)$ negativ i intervallet $(N+\frac{1}{2},\ N+1)$, positiv i intervallet $(N+1,\ N+\frac{3}{2})$ o.s.v.
Delar vi nu upp integralen i intervall om $\frac{1}{2}$

$$\int_N^\infty \overline{B}_{2p+1}(x)\ x^{-(2p+3)}\ dx = \int_N^{N+1/2} \overline{B}_{2p+1}(x)\ x^{-(2p+3)}\ dx + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{N+\frac{n-1}{2}}^{N+\frac{n}{2}} \overline{B}_{2p+1}(x)\ x^{-(2p+3)}\ dx$$

ser vi, med hjälp av sats 1, att eftersom $x^{-(2p+3)}$ är en avtagande funktion blir också absolutbeloppen av termerna avtagande. Då är alltid

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k} \overline{B}_{2p+1}(x)\ x^{-(2p+3)}\ dx + \int_{k}^{k+\frac{1}{2}} \overline{B}_{2p+1}(x)\ x^{-(2p+3)}\ dx < 0$$

och därmed

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_{N+\frac{n-1}{2}}^{N+\frac{n}{2}} \overline{B}_{2p+1}(x)\ x^{-(2p+3)}\ dx < 0 .$$

Slutligen får vi med användande av sats 5

$$\left| \int_N^\infty \overline{B}_{2p+1}(x)\ x^{-(2p+3)}\ dx \right| < \left| \int_N^{N+\frac{1}{2}} \overline{B}_{2p+1}(x)\ x^{-(2p+3)}\ dx \right|$$

$$< \int_N^{N+\frac{1}{2}} \frac{(2p+1)\,|b_{2p}|}{4} x^{-(2p+3)} \, dx$$

$$< \int_N^{N+\frac{1}{2}} \frac{(2p+1)\,|b_{2p}|}{4} N^{-(2p+3)} \, dx$$

$$= \frac{(2p+1)\,|b_{2p}|}{8 \; N^{2p+3}}$$

Nu återstår bara att uppskatta b_{2p}. Av (6) får vi

$$|b_{2p}| = \frac{(2p)!}{(2\pi)^{2p}} \, 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$$

$$\leq \frac{2(2p)!}{(2\pi)^{2p}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2}}$$

$$= \frac{(2p)!}{12(2\pi)^{2p-2}}$$

Sammanfattningsvis har vi alltså att

$$\frac{\pi^2}{6} \approx \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \sum_{k=1}^{p} b_{2k} \, N^{-(2k+1)}$$

där b_{2k} beräknas ur

$$\sum_{l=1}^{n-1} \binom{n}{l} b_l = 0, \; n\geq 2, \; b_0=1,$$

och där felet i beräkningen är mindre än

$$\frac{(2p+2)!}{96 \; (2\pi)^{2p-2} \; N^{2p+3}} \, .$$

N och p kan väljas godtyckligt alltefter hur stor noggrannhet man önskar.

3. Machins serie

Vi skall här använda serien

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left\{ 4\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1} \right\}$$

som upptäcktes av *John Machin* år 1706.

För att härleda seriens summa ansätter vi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

Derivering ger

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} .$$

Då är

$$f(x) = \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + C . \quad \text{(Se appendix B.)}$$

Eftersom $f(0)=0$ är $C=0$ och vi har

$$f(x) = \arctan x .$$

Nu är

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left\{ 4\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1} \right\} = 4\, f(\tfrac{1}{5}) - f(\tfrac{1}{239})$$

Låt $A = 4\, f(\frac{1}{5}) - f(\frac{1}{239}) = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$.

Då är $0<A<\frac{\pi}{2}$, varav

$$A = \arctan(\tan A).$$

Vi får

$$\tan A = \tan\left(4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}\right)$$

$$= \frac{\tan\left(4 \arctan \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{239}}{1 + \tan\left(4 \arctan \frac{1}{5}\right)\cdot\frac{1}{239}}$$

För att beräkna $\tan\left(4 \arctan \frac{1}{5}\right)$ tillämpar vi formeln

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1-\tan^2 a}$$ två gånger:

$$\tan(2 \arctan \tfrac{1}{5}) = \frac{2(\frac{1}{5})}{1 - (\frac{1}{5})^2} = \frac{5}{12}$$

$$\tan(4 \arctan \tfrac{1}{5}) = \frac{2 \tan(2 \arctan \frac{1}{5})}{1 - \tan^2(2 \arctan \frac{1}{5})} = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119}$$

Vi kan nu slutföra den tidigare beräkningen

$$\tan A = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}}$$

$$= \frac{120\cdot 239 - 119}{119\cdot 239 + 120}$$

$$= 1$$

Alltså $A = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Den här metoden och andra liknande, som också bygger på arcustangensfunktionen, har varit överlägsna andra metoder alltsedan 1700-talet, och har använts vid flertalet beräkningar av π ända fram till för några år sedan, då nya snabba algoritmer utvecklades för multiplikation av stora tal i datorer. Detta har gjort att metoder av den typ som redovisas i kapitel 4 har blivit de mest effektiva.

Exempel på andra formler som är snarlika Machins är

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$

$$\frac{\pi}{4} = 2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}$$

$$\frac{\pi}{4} = 5 \arctan \frac{1}{8} + 2 \arctan \frac{1}{18} + 3 \arctan \frac{1}{57}$$

$$\frac{\pi}{4} = 8 \arctan \frac{1}{10} - \arctan \frac{1}{239} - 4 \arctan \frac{1}{515}$$

I bilaga 1 redovisas ett Pascal-program för beräkning av π med Machins serie.

4. Borwein och Borweins iterativa formel

Vi skall här använda oss av en iterativ formel som har utvecklats av *Jonathan M. Borwein* och *Peter B. Borwein*, och som bestäms av

$$y_n = \frac{1 - \sqrt[4]{1-y_{n-1}^4}}{1 + \sqrt[4]{1-y_{n-1}^4}} \tag{1}$$

och

$$a_n = \left(1 + y_n\right)^4 a_{n-1} - 2^{2n+1}\left(y_n + y_n^2 + y_n^3\right) \tag{2}$$

med $y_0=\sqrt{2}-1$ och $a_0=6-\sqrt{2}$, varvid vi med hjälp av numeriska beräkningar kommer att göra troligt (inte bevisa) att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \pi .$$

Vi skall nu göra en uppskattning av $\pi-1/a_n$ med hjälp av (1) och (2) ovan. Talföljden a_0, a_1, a_2,... konvergerar mycket snabbt. Låt oss anta att den konvergerar mot $1/\pi$. Då kan vi sätta $\pi\approx 1/a_{n+1}$ varav

$$\pi - \frac{1}{a_n} \approx \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} .$$

Eftersom y_n är nära 0 då n är stort har vi också

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+y_n\right)^4 a_{n-1} - 2^{2n+1}\left(y_n+y_n^2+y_n^3\right) \\ &\approx \left(1+4y_n\right) a_{n-1} - 2^{2n+1} y_n \\ &= a_{n-1} + y_n \left(4\, a_{n-1} - 2^{2n+1}\right) \\ &\approx a_{n-1} + y_n \left(\frac{4}{\pi} - 2^{2n+1}\right) \end{aligned}$$

Vi får nu

$$\pi - \frac{1}{a_n} \approx \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} .$$

$$= \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n\, a_{n+1}}$$

$$\approx \pi^2 \left(a_n - a_{n+1} \right)$$

$$\approx \pi^2\, y_{n+1} \left(2^{2(n+1)+1} - \frac{4}{\pi} \right)$$

För att uppskatta y_{n+1} utnyttjar vi (1) samt det faktum att $(1-x)^{1/n} \approx 1-\frac{x}{n}$ då x är litet. Vi får

$$y_{n+1} = \frac{1 - \sqrt[4]{1-y_n^4}}{1 + \sqrt[4]{1-y_n^4}}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{1-y_n^4}}{\left(1 + \sqrt[4]{1-y_n^4} \right)^2}$$

$$= \frac{y_n^4}{\left(1 + \sqrt{1-y_n^4} \right) \left(1 + \sqrt[4]{1-y_n^4} \right)^2}$$

$$\approx \frac{y_n^4}{\left(2 - y_n^4 / 2 \right) \left(2 - y_n^4 / 4 \right)^2}$$

$$\approx \frac{y_n^4}{8 - 4\, y_n^4}$$

$$\approx \frac{y_n^4}{8}$$

varav

$$y_{n+1} \approx \frac{y_1^{\,4^n}}{8^{(4^n-1)/3}} = \frac{y_1^{\,4^n}}{2^{(4^n-1)}} \quad .$$

Vår approximation blir alltså

$$\pi - \frac{1}{a_n} \approx \frac{y_1^{4^n}}{2^{(4^n-1)}} \pi^2 \left(2^{2n+3} - \frac{4}{\pi} \right) .$$

Vi kan förvänta oss att approximationen är god ungefär i samma grad som 8 är en god approximation till $8-y_1^4$. Vill man ha en noggrannare approximation kan man använda y_2 i stället för y_1. Nu är $y_1 \approx 0,003734885463$, vilket ger följande tabell över vilka avvikelser från π vi kan förvänta oss

n	$\pi-\frac{1}{a_n}$ (approximerat värde)
1	$7,376250974 \cdot 10^{-9}$
2	$5,472109144 \cdot 10^{-41}$
3	$2,308580711 \cdot 10^{-171}$
4	$1,110954927 \cdot 10^{-694}$
5	$9,244416423 \cdot 10^{-2790}$
6	$6,913087996 \cdot 10^{-11172}$
7	$3,376545342 \cdot 10^{-44702}$
8	$3,002252076 \cdot 10^{-178825}$
9	$2,931929923 \cdot 10^{-715319}$
10	$4,166739730 \cdot 10^{-2861297}$

Med Pascalprogrammet, som redovisas i bilaga 2, har jag beräknat $\pi-1/a_n$ för $1 \le n \le 6$, och fick då följande värden

n	$\pi-\frac{1}{a_n}$ (beräknat värde)
1	$7,376250956 \cdot 10^{-9}$
2	$5,472109146 \cdot 10^{-41}$
3	$2,308580715 \cdot 10^{-171}$
4	$1,110954934 \cdot 10^{-694}$
5	$9,244416653 \cdot 10^{-2790}$
6	$6,913088685 \cdot 10^{-11172}$

Som vi ser är approximationen tämligen god för små värden på n. Det förefaller därför troligt att approximationen stämmer även för stora värden på n. Om detta är sant är $\lim_{n\to\infty}(\pi-1/a_n) = 0$, och alltså

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \pi .$$

Borwein och Borwein har också tagit fram flera andra algoritmer som bygger på samma principer. Här är ett exempel:

Låt

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a_0 = \frac{1}{2}$$

och

$$y_n = \frac{1 - \sqrt{1-y_{n-1}^2}}{1 + \sqrt{1-y_{n-1}^2}}, \quad a_n = \left(1 + y_n\right)^2 a_{n-1} - 2^n y_n.$$

Då är $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \pi$, precis som ovan.

Algoritmer av det här slaget är de snabbaste man känner idag när det gäller att beräkna pi med hjälp av dator. Detta förutsätter dock att man har effektiva algoritmer för att beräkna kvadratrötter och för att multiplicera stora tal i datorer, vilket inte kan sägas gälla för algoritmerna som används i Pascal-programmet i bilaga 2.

APPENDIX A

Vi skall här visa att funktionen

$$f(x) = \frac{B_n(x) - B_n(y)}{1 - e^{2\pi i(x-y)}}, \quad n\geq 2,\ 0\leq y\leq 1,$$

är kontinuerligt deriverbar för $0\leq x\leq 1$.

Eftersom samtliga fyra ingående termer är kontinuerligt deriverbara funktioner behöver vi bara koncentrera oss på de fall där uttrycket har formen $\frac{0}{0}$. I dessa fall definierar vi $f(x)$ som ett gränsvärde för att få en kontinuerlig funktion:

$$f(y) = \lim_{x\to y} \frac{B_n(x) - B_n(y)}{1 - e^{2\pi i(x-y)}} = \frac{i\ B_n'(y)}{2\pi}, \quad 0\leq y\leq 1,$$

samt då $y=0$:

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{B_n(x) - B_n(0)}{1 - e^{2\pi i(x-0)}} = \frac{i\ B_n'(0)}{2\pi},$$

och $y=1$:

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{B_n(x) - B_n(1)}{1 - e^{2\pi i(x-1)}} = \frac{i\ B_n'(1)}{2\pi} = \frac{i\ B_n'(0)}{2\pi}.$$

Vi skall nu studera derivatan.
Vi har

$$f'(x) = \frac{B_n'(x)(1-e^{2\pi i(x-y)})+(B_n(x)-B_n(y))(2\pi i e^{2\pi i(x-y)})}{(1-e^{2\pi i(x-y)})^2}$$

Sätt

$$g(x) = B_n'(x)(1-e^{2\pi i(x-y)})+(B_n(x)-B_n(y))(2\pi i e^{2\pi i(x-y)})$$

och

$$h(x) = (1-e^{2\pi i(x-y)})^2.$$

Då är $\lim_{x\to y} g(x)=0$ och $\lim_{x\to y} h(x)=0$, och enligt L'Hôpitals regel är då

$$\lim_{x\to y} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to y} \frac{g'(x)}{h'(x)}$$

$$= \lim_{x\to y} \left(\frac{B_n''(x)(1-e^{2\pi i(x-y)})+B_n'(x)(-2\pi i e^{2\pi i(x-y)})}{-4\pi i e^{2\pi i(x-y)}(1-e^{2\pi i(x-y)})} \right.$$

$$- \frac{B_n'(x)(-2\pi i e^{2\pi i(x-y)}) + (B_n(x)-B_n(y))(-(2\pi i)^2 e^{2\pi i(x-y)})}{-4\pi i e^{2\pi i(x-y)}(1-e^{2\pi i(x-y)})} \Bigg]$$

$$= \lim_{x\to y} \frac{B_n''(x)(1-e^{2\pi i(x-y)}) + (B_n(x)-B_n(y))(2\pi i)^2 e^{2\pi i(x-y)}}{-4\pi i e^{2\pi i(x-y)}(1-e^{2\pi i(x-y)})}$$

$$= \lim_{x\to y} \left(\frac{B_n''(x)}{-4\pi i e^{2\pi i(x-y)}} + \frac{(B_n(x)-B_n(y))(2\pi i)}{-2(1-e^{2\pi i(x-y)})} \right)$$

$$= \frac{iB_n''(y)}{4\pi} + \frac{B_n(y)}{2}$$

I det sista steget har vi återigen använt L'Hôpitals regel. För ett bevis för denna se någon lärobok i analys, t ex Calculus av Earl W. Swokowski.

För fallen $y=0$, $x\to 1^-$ och $y=1$, $x\to 0^+$ gäller helt analoga resultat eftersom $B_n(0)=B_n(1)$.

Appendix B

Vi skall här visa att

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C\ .$$

Låt x=tan t. Då är

$$\frac{dx}{dt} = D_t\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right) = \cos t\,\frac{1}{\cos t} + \sin t\left(-\frac{1}{\cos^2 t}\right)(-\sin t)$$

$$= 1 + \tan^2 t$$

Alltså får vi

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{(1+\tan^2 t)\,dt}{1+\tan^2 t} = t + C = \arctan x + C\ .$$

För att kontrollera resultatet deriverar vi arcustangens-funktionen.

Med utnyttjande av det välkända gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$$

har vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

varav, om $\lim_{h\to 0} f(h)=0$,

$$1 = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{\tan f(h)} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(h)}{h}\ \frac{h}{\tan f(h)}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} \Big/ \lim_{h\to 0} \frac{\tan f(h)}{h}$$

dvs

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\tan f(h)}{h}\ .$$

Enligt definitionen på derivata, och med

$$\tan\,(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

får vi slutligen

$$D_x(\text{arctan } x) = \lim_{h\to 0} \frac{\text{arctan }(x+h) - \text{arctan } x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\tan\ (\text{arctan }(x+h) - \text{arctan } x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{(1+(x+h)x)h}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

vilket är vad vi skulle visa.

Bilaga 1. Pascal-program för Machins serie

```
PROGRAM pi; (* Beräkning enligt Machins metod *)

{$A+,B-,D+,E-,F-,I+,L+,N+,O-,R+,S+,V+}
{$M 65520,0,655360}

USES Crt;

CONST qw=1E14;
      m=800;

VAR i:Integer;
    a,b:array(.1..m.) OF Comp;

FUNCTION Inte(x:Extended):Extended;
BEGIN
   IF x>=0 THEN
      Inte:=Int(x)
   ELSE
      Inte:=Int(x)-1
END;

PROCEDURE ber(k:Word;t:Shortint;a1:Integer);
VAR n:Integer;x:Extended;
BEGIN
   a(.1.):=a1*k*qw;k:=Sqr(k);t:=-t;n:=1;
   FOR i:=2 TO m DO a(.i.):=0;
   WHILE n<m*Ln(qw)/Ln(Sqrt(k)) DO BEGIN
      FOR i:=1 TO m-1 DO BEGIN
         x:=a(.i.)-Int(a(.i.)/k)*k;
         a(.i+1.):=a(.i+1.)+x*qw;
         a(.i.):=Int(a(.i.)/k);
      END; a(.m.):=a(.m.)/k;
      t:=-t;  x:=0;
      FOR i:=1 TO m-1 DO BEGIN
         b(.i.):=b(.i.)+t*Int((a(.i.)+x*qw)/n);
         x:=(a(.i.)+x*qw)-n*Int((a(.i.)+x*qw)/n)
      END; b(.m.):=b(.m.)+t*(a(.m.)+x*qw)/n;
   n:=n+2;
   END;
END;
```

```
PROCEDURE lagra;
TYPE atyp= ARRAY [1..7] OF 0..99;
VAR i,j:Integer;
    x:Extended;
    a:atyp;
    decimal:FILE OF atyp;
BEGIN
   Assign(decimal,'C:\PI\DECIMAL');
   Rewrite(decimal);
   FOR i:=1 TO m DO BEGIN
      x:=Int(b[i]);
      FOR j:=7 DOWNTO 1 DO BEGIN
         a[j]:=Round(x-100*Int(x/100));
         x:=Int(x/100);
      END;
      Write(decimal,a);
   END;
   Close(decimal);
END;

BEGIN
   FOR i:=1 TO m DO b(.i.):=0;
   ber(5,1,16);
   ber(239,-1,4);
   FOR i:=m DOWNTO 2 DO BEGIN
      b(.i-1.):=b(.i-1.)+Inte(b(.i.)/qw);
      b(.i.):=b(.i.)-Inte(b(.i.)/qw)*qw;
   END;
   Writeln;
   FOR i:=1 TO m DO
      Writeln(b(.i.):25:0);
   Writeln('Tryck <ENTER> för lagring på C-volymen');
   Readln;
   Lagra;
   Readln;
END.
```

Bilaga 2. Pascal-program för Borwein och Borweins algoritm

```
PROGRAM pi; (* Beräkning av pi med en iterativ formel *)

{$A+,B-,D+,E-,F-,I+,L+,N+,O-,R+,S+,V+}
{$M 65520,0,655360}

USES Printer;

CONST n=700;

TYPE egentyp=array [1..n] of Comp;

VAR i,j,k:Integer;
    pi1,pi2,pi3,pi4,pi5:egentyp;
    x:ARRAY[1..6] of Extended;
    m:ARRAY[1..6] of Integer;

PROCEDURE justera(n:Integer;VAR a:egentyp);
VAR i:Integer;
FUNCTION integ(x:Extended):Extended;
BEGIN
   IF x>=0 THEN
      integ:=Int(x)
   ELSE
      integ:=Int(x)-1
END;
BEGIN
   FOR i:=n DOWNTO 2 DO BEGIN
     a[i-1]:=a[i-1]+integ(a[i]/1e16);
     a[i]:=a[i]-integ(a[i]/1e16)*1e16;
   END;
END;

PROCEDURE addition(n:Integer;VAR a,b,c:egentyp);
VAR i:Integer;
BEGIN
   FOR i:=n DOWNTO 1 DO BEGIN
      c[i]:=a[i]+b[i]
   END;
   justera(n,c);
END;
```

```
PROCEDURE subtraktion(n:Integer;VAR a,b,c:egentyp);
VAR i:Integer;
BEGIN
   FOR i:=n DOWNTO 1 DO BEGIN
      c[i]:=a[i]-b[i];
   END;
   justera(n,c);
END;

PROCEDURE multiplikation(n:Integer;VAR a,b,c:egentyp);
VAR i,j:Integer;
    a0,a1,b0,b1,temp,temp0:Comp;
    mul0:egentyp;
BEGIN
   FOR i:=1 TO n DO mul0[i]:=0;
   FOR i:=1 TO n-1 DO BEGIN
      FOR j:=1 TO n-i DO BEGIN
         a0:=Int(a[i]/1e8); a1:=a[i]-1e8*a0;
         b0:=Int(b[j]/1e8); b1:=b[j]-1e8*b0;
         temp:=a1*b0+a0*b1; temp0:=Int(temp/1e8);
         mul0[i+j]:=mul0[i+j]+a1*b1+1e8*(temp-1e8*temp0);
         mul0[i+j-1]:=mul0[i+j-1]+temp0+a0*b0;
      END;
   END;
   FOR i:=1 TO n DO BEGIN
      j:=n-i+1;
      a0:=Int(a[i]/1e8);
      b0:=Int(b[j]/1e8);
      temp:=(a[i]-1e8*a0)*b0+a0*(b[j]-1e8*b0);
      mul0[n]:=mul0[n]+Int(temp/1e8)+a0*b0;
   END;
   FOR i:=1 TO n DO c[i]:=mul0[i];
   justera(n,c);
END;

PROCEDURE invertera(n:Integer;VAR a,b:egentyp);
VAR i,j:Integer;
    inv0,inv1,inv2:egentyp;
    x0:Extended;
    m:ARRAY [1..10] of Integer;
```

```
BEGIN
   j:=n;
   i:=0;
   REPEAT
      i:=i+1;
      m[i]:=j;
      j:=Trunc(j/2)+1;
   UNTIL j=2;
   x0:=a[1]/1e16+a[2]/1e32;
   x0:=1/x0;
   inv0[1]:=Int(1e16*x0);
   inv0[2]:=1e32*x0-1e16*Int(1e16*x0);
   FOR j:=3 TO n DO inv0[j]:=0;
   inv1[1]:=2*1e16;
   FOR j:=2 TO n DO inv1[j]:=0;
   FOR i:=i DOWNTO 1 DO BEGIN
      multiplikation(m[i],a,inv0,inv2);
      subtraktion   (m[i],inv1,inv2,inv2);
      multiplikation(m[i],inv0,inv2,inv0);
   END;
   FOR i:=1 TO n DO b[i]:=inv0[i];
END;

PROCEDURE kvadratrot(n:Integer;VAR a,b:egentyp);
VAR i,j:Integer;
    kva0,kva1:egentyp;
    x0:Extended;
    m:ARRAY [1..10] of Integer;
PROCEDURE division(n:Integer;VAR a,b:egentyp);
VAR i:Integer;
    div0:egentyp;
BEGIN
   div0[1]:=Int(a[1]/2);
   FOR i:=2 TO n DO
      div0[i]:=Int(a[i]/2)+1e16*(a[i-1]/2-Int(a[i-1]/2));
   FOR i:=1 TO n DO b[i]:=div0[i];
END;
BEGIN
   j:=n;
   i:=0;
```

```
   REPEAT
      i:=i+1;
      m[i]:=j;
      j:=Trunc(j/2)+1;
   UNTIL j=2;
   x0:=a[1]/1e16+a[2]/1e32;
   x0:=Sqrt(x0);
   kva0[1]:=Int(1e16*x0);
   kva0[2]:=1e32*x0-1e16*Int(1e16*x0);
   FOR j:=3 TO n DO kva0[j]:=0;
   FOR i:=i DOWNTO 1 DO BEGIN
      invertera     (m[i],kva0,kva1);
      multiplikation(m[i],a,kva1,kva1);
      addition      (m[i],kva0,kva1,kva0);
      division      (m[i],kva0,kva0);
   END;
   FOR i:=1 TO n DO b[i]:=kva0[i];
END;

PROCEDURE jamforelse(a:egentyp;VAR x1:Extended;
                     VAR m:Integer);
TYPE typ = 0..99;
VAR i,j:Integer;
    b:typ;
    p:BOOLEAN;
    x,x0:Extended;
    a0:ARRAY [1..8] OF typ;
    decimal:FILE OF typ;
BEGIN
   Assign(decimal,'C:\PI\DECIMAL');
   Reset(decimal);
   i:=0;
   REPEAT
      i:=i+1;
      x:=a[i];
      FOR j:=8 DOWNTO 1 DO BEGIN
         a0[j]:=Round(x-100*Int(x/100));
         x:=Int(x/100);
      END;
      p:=TRUE;
      j:=0;
```

```
      REPEAT
         j:=j+1;
         Read(decimal,b);
         IF a0[j]<>b THEN  p:=FALSE;
      UNTIL (p=FALSE) OR (j=8);
   UNTIL (p=FALSE) OR (i=n-1);
   x:=Int(Exp(2*(9-j)*Ln(10))+0.5);
   x0:=a[i]-x*Int(a[i]/x)+a[i+1]/1e16;
   x:=x/100;
   x1:=x*b;
   FOR j:=1 TO 9 DO BEGIN
      Read(decimal,b);
      x:=x/100;
      x1:=x1+x*b;
   END;
   Close(decimal);
   x1:=x1-x0;
   j:=Trunc(Ln(Abs(x1))/Ln(10));
   m:=16*i-j;
   x1:=x1/Exp(j*Ln(10));
END;

BEGIN
   pi1[1]:=2*1e16;
   FOR i:=2 TO n DO pi1[i]:=0;
   kvadratrot(n,pi1,pi1);
   pi2:=pi1;
   pi2[1]:=pi2[1]-1e16;                  (* pi2 innehåller *)
                                          (* nu y0          *)
   pi3[1]:=6*1e16;
   FOR i:=2 TO n DO pi3[i]:=0;
   FOR i:=1 TO n DO pi1[i]:=4*pi1[i];
   subtraktion(n,pi3,pi1,pi1);           (* pi1 innehåller *)
                                          (* nu a0          *)
   pi3[1]:=1*1e16;
   Writeln;
   FOR k:=1 TO 6 DO BEGIN
      multiplikation(n,pi2,pi2,pi2);
      multiplikation(n,pi2,pi2,pi2);
      subtraktion   (n,pi3,pi2,pi2);
```

```
    kvadratrot     (n,pi2,pi2);
    kvadratrot     (n,pi2,pi2);
    subtraktion    (n,pi3,pi2,pi4);
    addition       (n,pi3,pi2,pi5);
    invertera      (n,pi5,pi5);
    multiplikation(n,pi4,pi5,pi2);      (* pi2 innehåller *)
                                        (* nu y_k          *)
    addition       (n,pi3,pi2,pi4);
    multiplikation(n,pi4,pi4,pi4);
    multiplikation(n,pi4,pi4,pi4);
    multiplikation(n,pi4,pi1,pi4);
    multiplikation(n,pi2,pi2,pi5);
    addition       (n,pi2,pi5,pi5);
    addition       (n,pi3,pi5,pi5);
    multiplikation(n,pi2,pi5,pi5);
    FOR i:=1 TO 2*k+1 DO
       addition    (n,pi5,pi5,pi5);
    subtraktion    (n,pi4,pi5,pi1);     (* pi1 innehåller *)
                                        (* nu a_k          *)
    invertera      (n,pi1,pi4);
    jamforelse(pi4,x[k],m[k]);        (* jämför med värde *)
                                      (* på pi, som finns *)
                                      (* på C-volymen     *)
    Writeln;
    Writeln(k:12,x[k]:19:12,'*1e-',m[k]);
  END;
  Writeln(Lst);writeln(Lst);writeln(Lst);writeln(Lst);
  FOR k:=1 TO 6 DO BEGIN
    Writeln(Lst);
    Writeln(Lst,k:12,x[k]:19:12,'*1e-',m[k]);
  end;
  Writeln(Lst,#12);
  Readln;
END.
```

KÄLLOR

Materialet till första delen av kapitel 1 har hämtats från boken *Geometri och planimetri* av *Hjalmar Nilsson* och *Fritz Wigforss*.

Kapitel 2 har skrivits helt efter artikeln *Euler-MacLaurins summationsformel och Bernoulliska polynom* av *Lars Hörmander*. Artikeln finns i samlingen *Välj specialarbete i matematik*, sammanställd av *Dan Laksov*.

Idéen till kapitel 3 har jag fått från tidskriften *Illustrerad Vetenskap*, nr 5 1988.

Algoritmen i kapitel 4 kommer från artikeln *Ramanujan and Pi*, av *Jonathan M. Borwein* och *Peter B. Borwein*. Artikeln är hämtad från tidskriften *Scientific American*, feb. 1988.

Algoritmerna för invertering och kvadratrotsurdragning i Pascal-programmet i bilaga 2 har jag hämtat från *Datorn i matematikundervisningen* av *Karl Greger*.

Rättelser och kommentarer till "Metoder för numerisk beräkning av π", specialarbete i matematik 1990, Gymnasieskolan i Vänersborg.

Nedanstående är en sammanställning av iakttagelser gjorda av professor Lars Hörmander (Lunds Universitet), docent Per-Anders Ivert (Lunds Universitet, tidigare Universitetet i Linköping), docent Åke H Samuelsson (Göteborgs Universitet) och docent Gert Almkvist (Lunds Universitet), alla universitetslärare och forskare i matematik, samt undertecknad, som f. n. studerar bl. a. matematik vid Lunds Universitet.

1. På sidan 4 är språnget till den geometriska serien för $\lim_{n\to\infty} k_n$ något snabbt och dåligt motiverat. Följande informella motivering kan öka förståelsen.

Låt T_n vara den lineära transformation, som avbildar $n\frac{s_n}{2}$ på 0 och $n\frac{S_n}{2}$ på 1, d. v. s.

$T_n(x) = \dfrac{x - n\frac{s_n}{2}}{n\frac{S_n}{2} - n\frac{s_n}{2}}$. Av definitionen på k_n följer nu $T_n(\pi) = T_n\left(n\frac{s_n}{2} + k_n\left(n\frac{S_n}{2} - n\frac{s_n}{2}\right)\right)$ $= (1-k_n)\, T(n\frac{s_n}{2}) + k_n\, T(n\frac{S_n}{2}) = (1-k_n)\cdot 0 + k_n\cdot 1 = k_n$. Av $n\frac{s_n}{2} < \pi < n\frac{S_n}{2}$ följer att $0 < k_n < 1$.

Antag nu, att n är så stort, att s_n är nära noll. Vi kan då med god noggrannhet använda de på sidorna 2 och 3 beräknade gränsvärdena, som om de var likheter. Då kan vi säga, att $T_n(2n\frac{s_{2n}}{2}) = \frac{1}{4}$ och $T_n(2n\frac{S_{2n}}{2}) = \frac{1}{2}$. Vi vet vidare att $2n\frac{s_{2n}}{2} < \pi < 2n\frac{S_{2n}}{2}$, så att $\frac{1}{4} < k_n < \frac{1}{2}$.

På detta sätt kan vi successivt begränsa k_n till allt kortare intervall, där intervallängden för varje steg minskar med en faktor $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Betraktar man de på detta sätt erhållna undre begränsningarna för k_n, får man den i texten angivna geometriska serien.

Om vi i stället ser på de övre begränsningarna blir resultatet $\lim_{n\to\infty} k_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 - \ldots = \frac{1}{3}$. Svaret blir naturligtvis detsamma på detta sätt.

2. I formeln längst ned på sidan 5 skall nämnaren vara n^{-4} och inte n^4.

3. På sidan 6 definieras Beroullipolynomen på ett något olyckligt sätt. Det är här bättre att låta (1) och (3) utgöra definitionen. Om B_{n-1} är givet bestämmer formel (1) B_n, sånär som på en konstant, och (3) ger oss direkt denna konstant, vilket inte (2) gör. Med denna definition får vi i stället formel (2) som en konsekvens av (1) och (3), vilket kan visas på liknande sätt som (3) har visats i texten. Formeln (3) är giltig för $n\geq 1$.

4. Mitt på sidan 7 skall det stå $(-1)^{n+1}B_{n+1}(x)+C$ och inte $(-1)^{n+1}B_n(x)+C$.

5. I induktionsbevisen i kapitel 2 har jag kallat det som skall visas ett antagande, men det är snarare så, att induktionssteget är en implikation, där man visar ett påstående.

6. I induktionsstegen har använts obestämda integraler. När man skall visa att två deriverbara funktioner är lika, är det emellertid oftast bättre, att antingen använda bestämda integraler eller visa att derivatorna är lika och att funktionerna överensstämmer i någon punkt.

7. Sats 4 på sidan 10 skall lyda $B_n(2x) = 2^{n-1}(B_n(x)+B_n(x+\frac{1}{2}))$. Det skall alltså vara ett plustecken i stället för ett minustecken. Samma fel återkommer i beviset, en gång på sidan 10 och två gånger på sidan 11.

8. Nämnaren på sidan 13, rad 8, skall vara $2\pi i\mu$, inte $2\pi i v$.

9. I steget från första till andra raden på sidan 15 förutsätts att $f(0) = f(1)$, men detta behöver inte alltid vara sant. Gränsvärdet är dock alltid 0, så om man kan stryker första delen av rad 2, blir beviset korrekt.

10. På sidan 14, rad 10, och på 8 ställen på nedre halvan av sidan 15 – inklusive formel (6) – skall exponenten i Fourierserien för $\overline{B}_n(x)$ vara $2\pi i\nu x$, alltså utan minustecken, precis som i formel (4).

11. I rekursionsformeln för b_n på sidan 19, skall l gå från 0 till $n-1$, ej från 1, enligt sats 2. Vi får således $b_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n+1}{l} b_l$, $n \geq 1$.

12. Metoden i kapitel 4 har något missvisande kallats Borweins. Den är ju egentligen bara en iteration av Landentransformationer av elliptiska integraler, och att detta kunde användas för beräkning av π, upptäcktes av Brent 1974. Bröderna Borweins insats kan nog huvudsakligen sägas vara, att de har marknadsfört metoden. De har dock själva utvecklat flera andra algoritmer.

13. På sidan 23 måste $a_0 = 6 - 4\sqrt{2}$, och inte $6 - \sqrt{2}$, för att beräkningarna skall stämma.

14. Algoritmer av den sort, som används i kapitel 4, kan visserligen vara mycket snabba med effektiva program, men snabbt konvergerande serier kan ibland vara ännu snabbare. Sålunda använde för ett par år sedan bröderna David och Gregory Chudnovsky följande serie för att beräkna π med fler än 10^9 decimaler:

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{640320^{3/2}}{6541681608} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{13591409}{545140134 + n}\cdot\frac{(6n)!}{(3n)!\,(n!)^3}\cdot\frac{(-1)^n}{640320^{3n}}.$$

Absolutbeloppet av kvoten mellan två termer i serien är ungefär $6{,}6\cdot 10^{-15}$.

15. På sidan 28, rad 4, skall täljaren i sista termen vara $B_n'(y)$, inte $B_n(y)$.

16. Det välkända gränsvärdet på sidan 29 är naturligtvis $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Mats Andersson Lund 27 februari 1992

PS: Jag har bytt efternamn till Anderbok från 1993-03-02.

Mats Anderbok Lund 9 september 1993